SESSION DE 1977

MATHÉMATIQUES

Épreuve n° 2

DURÉE : 3 heures

Aucun document n'est autorisé.

PROBLÈME

E est un espace vectoriel euclidien, de dimension n.

$\mathfrak{B} = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ est une base orthonormée de E.

1. On définit sur E un ensemble de n vecteurs :

$$V_m = \sum_{j=1}^{n} \sin\left(\frac{mj\pi}{n+1}\right) e_j \qquad \text{où} \qquad m \in \mathbb{N}, \quad 1 \leqslant m \leqslant n$$

1.1. h désignant un nombre réel, on pose :

$$C_n(h) = \sum_{j=1}^{n} \cos(jh).$$

En utilisant une somme d'exponentielles complexes, déterminer la valeur de $C_n(h)$ dans les deux cas particuliers suivants :

$$h = \frac{2m\pi}{n+1} \quad \text{et} \quad h = \frac{(2m-1)\pi}{n+1} \qquad \text{avec} \qquad m \in \mathbb{N}, \quad 1 \leqslant m \leqslant n$$

1.2. Calculer $\| V_m \|$, norme euclidienne du vecteur V_m.

On vérifiera que cette norme, indépendante de m, ne dépend que de n.

1.3. On définit sur E l'ensemble des n vecteurs.

$$\varepsilon_m = \frac{V_m}{\| V_m \|}.$$

Soit $\mathfrak{B}' = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n)$.

Montrer que $\mathfrak{B}'$ est une base orthonormée de E.

2. Soit P la matrice de passage de $\mathfrak{B}$ vers $\mathfrak{B}'$.

2.1. Quelle est la matrice transposée de P?

Quelle est la matrice inverse de P?

2.2. Soit U un vecteur de E. On pose :

$$U = \sum_{j=1}^{n} x_j e_j = \sum_{j=1}^{n} y_j \varepsilon_j \; ; \qquad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \; ; \qquad Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}.$$

Calculer X en fonction de Y et de P.

Calculer Y en fonction de X et de P.

2.3. Expliciter la matrice P dans le cas où $n = 3$.

3. On complète l'ensemble des n vecteurs $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ en posant, par définition : $e_0 = 0$ et $e_{n+1} = 0$.

Soit f l'endomorphisme de E défini par :

$$f(e_j) = \frac{1}{2}[e_{j-1} + e_{j+1}] \qquad \text{avec} \qquad 1 \leqslant j \leqslant n$$

3.1. Soit $K = \mathfrak{M}(f, \mathfrak{B})$ la matrice associée à l'endomorphisme f dans la base $\mathfrak{B}$. Écrire la matrice K.

3.2. Calculer les composantes du vecteur $f(V_m)$ $(1 \leqslant m \leqslant n)$ sur la base $\mathfrak{B}$. En déduire que V_m est vecteur propre de f et donner la valeur propre correspondante.

3.3. Soit $K' = \mathfrak{M}(f, \mathfrak{B}')$ la matrice associée à f dans la base $\mathfrak{B}'$. Écrire la matrice K'.

.../...

ECOLE NATIONALE SUPERIEURE DES ARTS ET METIERS 1977 ×77×

3.4. L'endomorphisme f est-il un automorphisme de E?

On discutera suivant les valeurs de n.

Déterminer, dans tous les cas, le noyau et l'image de f.

3.5. On suppose dans cette partie $n = 3$.

L'espace affine euclidien est rapporté au repère orthonormé :

$\mathcal{R} = (0, e_1, e_2, e_3)$, dont les axes sont notés Ox_1, Ox_2, Ox_3.

On considère la surface (σ) d'équation :

$$x_1x_2 + x_2x_3 = 1$$

Montrer que (σ) est un cylindre; en donner une directrice et la direction des génératrices.

4. ω et k sont deux réels donnés, non nuls.

Le vecteur U de E est fonction de la variable réelle t.
U vérifie l'équation différentielle :

$$\frac{d^2U}{dt^2} + \omega^2 U = 2k^2 f(U) \tag{1}$$

avec, selon les notations indiquées en (2.2.) :

$$\frac{d^2U}{dt^2} = \sum_{j=1}^{n} \frac{d^2x_j}{dt^2} e_j = \sum_{j=1}^{n} \frac{d^2y_j}{dt^2} \varepsilon_j .$$

On appelle système (I) le système différentiel vérifié par les n fonctions $x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t)$, composantes de $U(t)$ dans la base $\mathfrak{B}$.

On appelle système (II) le système différentiel vérifié par les n fonctions $y_1(t), y_2(t), \ldots, y_n(t)$, composantes de $U(t)$ dans la base $\mathfrak{B}'$.

4.1. Écrire le système (II).

4.2. On dira que l'équation (1) est stable si, pour toute solution $U(t)$ de (1), $\| U(t) \|$ reste bornée quand $t \to \infty$.

Écrire une inégalité entre ω, k et n, exprimant une condition nécessaire et suffisante pour que l'équation (1) soit stable.

Cette condition sera appelée condition (c).

4.3. La condition (c) étant satisfaite, donner la solution générale du système (II).

Comment obtient-on alors la solution générale du système (I)?

5. On suppose dans toute cette partie $n = 3$. et l'on prend :

$$k^2 = \frac{3\sqrt{2}}{10}\omega^2 .$$

5.1. Vérifier que la condition (c) est satisfaite.

5.2. Déterminer la solution particulière $(x_1(t), x_2(t), x_3(t))$ du système (I) satisfaisant aux conditions initiales :

$$x_1(0) = x_2(0) = x_3(0) = 0$$

$$\frac{dx_1}{dt}(0) = \frac{dx_3}{dt}(0) = \alpha \; ; \qquad \frac{dx_2}{dt}(0) = -\alpha.$$

où α est un réel donné non nul.

On pourra poser $\lambda = \omega\sqrt{\frac{2}{5}}$ pour simplifier l'écriture.

5.3. Comme en (3.5), l'espace affine euclidien est rapporté au repère orthonormé $\mathcal{R} = (0, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$.

Soit $p(t)$ le point ayant pour coordonnées $x_1(t)$, $x_2(t)$, $x_3(t)$ déterminées en (5.2).

Étudier la courbe γ, ensemble des points $p(t)$, quand t décrit l'ensemble des réels.

C'est une courbe plane que l'on demande de représenter graphiquement.

×78×

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail